Module 10

Les probabilités

Le diagramme circulaire

Notes de cours

Mathématiques 2e secondaire

Mai et juin 2019

Étape 3

Nom : CORRIGÉ

Groupe :____________

Document préparé par Mylène Picotte et Josiane Richard

Rappels sur les probabilités

Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire relève du hasard. Il est donc impossible de prédire avec certitude le résultat.

Il existe deux types d'expériences aléatoires:

- *Simple:* 1 étape
- *Composée:* plusieurs étapes (+ d'une pige ou plus d'un choix

L'univers des possibles

Dans une expérience aléatoire, l'univers des Possibles représente tous les résultats possibles. On le note Ω (omega).

1. Quel est l'univers des possibles du lancer d'un dé ?

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2. Quel est l'univers des possibles de la pige dans un sac contenant les voyelles?

$\Omega = \{a, e, i, o, u, y\}$

Événement

Un événement est un sous-ensemble de l'univers des possibles. On note les événements par des lettres majuscules.

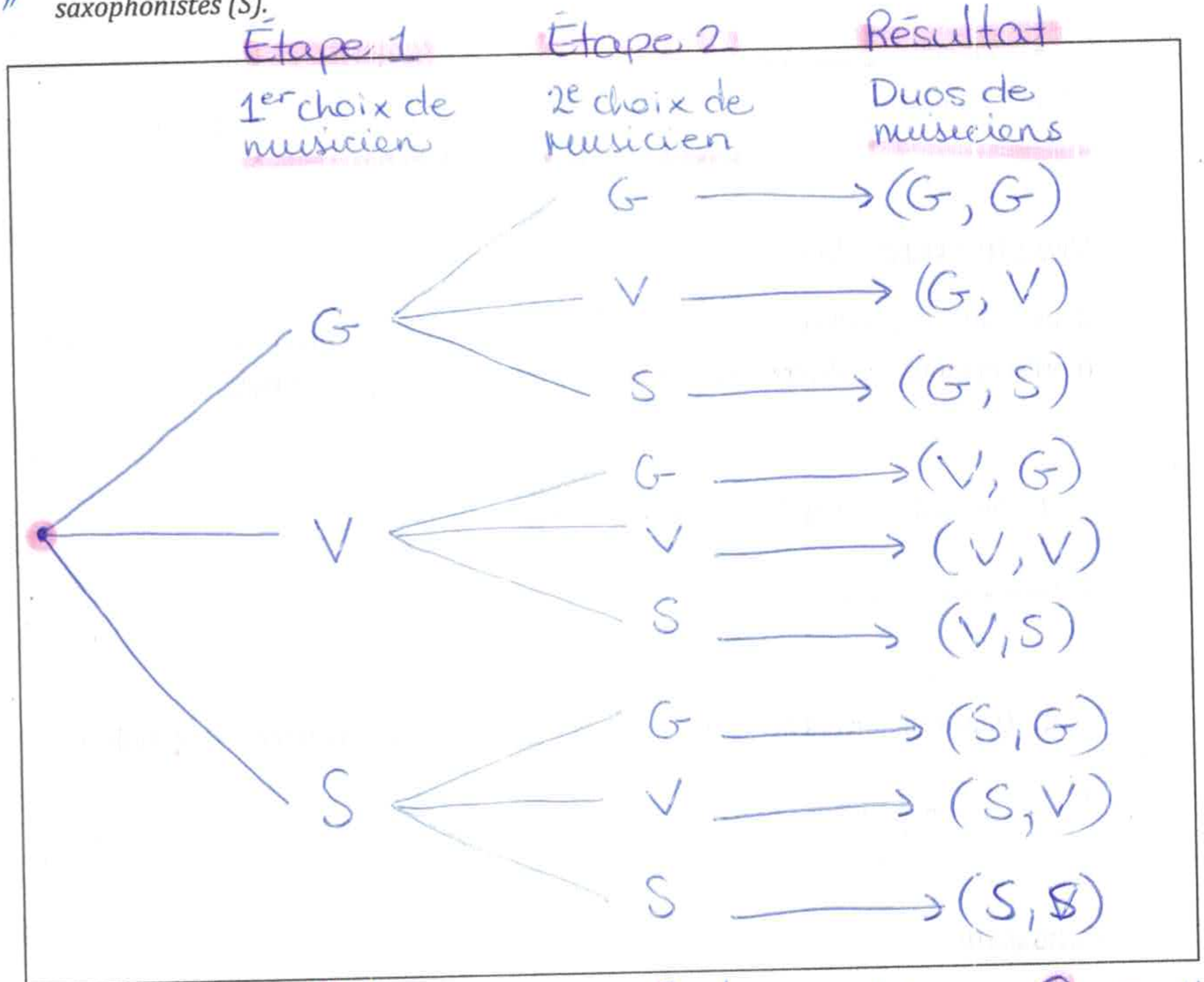
A = {Obtenir un nombre pair sur un dé} est un événement.

$A = \{2, 4, 6\}$

Le diagramme en arbre

Le diagramme en arbre permet de dénombrer les résultats possibles d'une expérience aléatoire composée.

Construis le diagramme en arbre de l'expérience aléatoire qui consiste à sélectionner deux musiciens parmi un groupe de guitaristes (G), de violoncellistes (V) et de saxophonistes (S).



3 choix possibles pour la 1ère étape • 3 choix possibles pour la 2e étape = 9 résultats possibles

Étapes de construction

1. Faire un point de départ
2. Détermine le nombre d'étapes (choix tirage) et écrire les titres
3. Faire les branches pour chaque étapes
4. Écrite les résultats

Dénombrement : La règle de la multiplication

La règle de la multiplication permet de déterminer le **nombre de résultats possibles d'une expérience aléatoire à** Plusieurs étapes (ou composée).

Nombre total de résultats possibles = Produit du nb de possibilités pour chaque étape

1. Un questionnaire contient cinq questions.

   Les questions 1 et 2 demandent de répondre par vrai ou faux. (2 possibilités)

   Les questions 3, 4 et 5 sont à choix multiples (a, b, c, d) (4 possibilités)

   Combien existe-t-il de façons différentes pour répondre à ce questionnaire?

Nb de résultats possibles $= Q1 \cdot Q2 \cdot Q3 \cdot Q4 \cdot Q5 =$

$= 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$ façons différentes de répondre

2. Combien de combinaisons est-il possible de faire à l'aide de 4 chiffres, 2 lettres?

Nombre de codes differents

Réponse : ______

$= Ch1 \cdot Ch2 \cdot Ch3 \cdot Ch4 \cdot L1 \cdot L2$

$= 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26$

$= 6\,760\,000$ Codes différents

La probabilité théorique

Probabilité théorique = $\frac{\text{nb de résultats favorables}}{\text{nb de résultats possibles}}$

*<u>Note importante :</u> La probabilité d'un événement est **toujours** un nombre entre 0 et 1. (0 et 100%)

- Lorsqu'une probabilité vaut 1, cela signifie que l'événement est certain
- Lorsqu'une probabilité vaut 0, cela signifie que l'événement est impossible

1. Un sac contient des jetons sur lesquels sont inscrites les 26 lettres de l'alphabet.

Quelle est la probabilité des événements suivants?

a e i o u y

- P(obtenir un m) = $\frac{1}{26}$
- P(obtenir une voyelle) = $\frac{6}{26} = \frac{3}{13}$
- P(obtenir un c ou un d) = $\frac{2}{26} = \frac{1}{13}$

+

Remarque :
P(obtenir un m) signifie la *probabilité d'obtenir la lettre m.*

2. Dans un jeu de cartes régulier, calcule la probabilité de :

- Piger une carte de cœur? $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
- Piger un roi ? $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$
- Piger une carte noire? $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$
- Piger une carte de pique rouge? $\frac{0}{52}$ → c'est impossible

Le calcul des probabilités

Probabilité d'un événement composé

Un événement composé suppose souvent **un choix**. La probabilité d'un tel événement st égale à **la somme des probabilités** de chaque événement.

Le mot **«ou»** est donc un indice.

$$\boxed{\text{ou} \Longrightarrow \text{addition des probabilités}}$$

Un bocal contient 4 billes bleues, 2 billes rouges, 3 billes vertes. 9 billes

a) Quelle est la probabilité de l'événement «tirer une bille rouge **ou** une bille bleue»?
+

$$P(R \text{ ou } B) = P(R) + P(B)$$
$$= \frac{2}{9} + \frac{4}{9}$$
$$= \frac{6}{9}$$

P(Rouge ou bleue) = $\frac{2}{3}$ 66,67 %

b) Quelle est la probabilité de l'événement «tirer une bille bleue **ou** verte»?

$$P(B \text{ ou } V) = P(B) + P(V)$$
$$= \frac{4}{9} + \frac{3}{9}$$
$$= \frac{7}{9}$$

P(Bleue ou verte) = $\frac{7}{9}$ 77,78 %

Probabilité d'une expérience aléatoire à plusieurs étapes

La probabilité d'une expérience aléatoire de **plusieurs étapes** est égale au **produit des probabilités** correspondant à chaque étape.

Les mots **ET, SUIVI DE, CONSÉCUTIF** et **SUCESSIVEMENT** sont des indices qu'il s'agit d'une expérience aléatoire à plusieurs étapes,

{et} {suivi de} {consecutif} {successivement} ⇒ Multiplication des probabilités

Dans un sac contenant 4 billes rouges, 3 billes bleues et 2 billes vertes. = 9 billes On pige 2 billes consécutives. On remet les billes dans le sac entre chaque pige.

a) Quelle la probabilité de tirer une bille rouge suivie d'une verte?

$$P(R,V) = P(R) \times P(V) = \frac{4}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{8}{81}$$

P(R,V) = $\frac{8}{81}$ 9,88%

b) Quelle la probabilité de tirer trois billes bleues consécutives?

$$P(B,B,B) = P(B) \times P(B) \times P(B) = \frac{3}{9} \times \frac{3}{9} \times \frac{3}{9} = \frac{27}{729} =$$

P(B, B, B) = $\frac{1}{27}$ 3,7%

c) Quelle est la probabilité de tirer une bille bleue ~~et~~ suivi de une bille verte?

$$P(B,V) = P(B) \times P(V) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{81}$$

P(B,V) = $\frac{2}{27}$ 7,4%

L'arbre de probabilités

L'arbre de probabilités permet de représenter les expériences aléatoires de façon visuelle. Il s'agit d'un diagramme en arbre qui contient des probabilités.

Exemple d'arbre de probabilités

Une urne contient 4 billes rouges, 2 billes bleues et une bille verte. = 7 billes On tire successivement et avec remise 2 billes de l'urne. Construis l'arbre de probabilités représentant cette expérience aléatoire.

1er tirage	2e tirage	Résultats	Probabilité	
R ($\frac{4}{7}$)	R ($\frac{4}{7}$)	(R,R)	$\frac{4}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{16}{49}$	≈32,7%
	B ($\frac{2}{7}$)	(R,B)	$\frac{4}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{8}{49}$	≈16,3%
	V ($\frac{1}{7}$)	(R,V)	$\frac{4}{7} \times \frac{1}{7} = \frac{4}{49}$	≈8,2%
B ($\frac{2}{7}$)	R ($\frac{4}{7}$)	(B,R)	$\frac{2}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{8}{49}$	≈16.3%
	B ($\frac{2}{7}$)	(B,B)	$\frac{2}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{4}{49}$	≈8,2%
	V ($\frac{1}{7}$)	(B,V)	$\frac{2}{7} \times \frac{1}{7} = \frac{2}{49}$	≈4,1%
V ($\frac{1}{7}$)	R ($\frac{4}{7}$)	(V,R)	$\frac{1}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{4}{49}$	≈8,2%
	B ($\frac{2}{7}$)	(V,B)	$\frac{1}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{2}{49}$	≈4,1%
	V ($\frac{1}{7}$)	(V,V)	$\frac{1}{7} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{49}$	≈2%

Combien de resultats possible → 3 couleurs × 3 couleurs = 9 combinaisons possibles

≈100,1%

Étapes de construction

1. Faire un point de départ
2. Déterminer le nb d'étapes (< Choix tirages) et écrire les titre
3. Faire les branches pour chaque étapes
4. Écrire les resultats en parenthèses
5. *** Ecrire les Probabilités sur chaque *** branche

Comment valider les probabilités dans ton arbre de probabilités?

additionner les probabilités

→ somme des fractions = 1

ou

→ somme des % = 100%

Expériences aléatoires à plusieurs étapes AVEC et SANS REMISE

Est-ce que les expériences suivantes sont avec ou sans remise?

	Avec remise	Sans remise
Élizabeth lance une pièce de monnaie deux fois et observe le résultat obtenu.	X	
Les jeunes patients d'une dentiste choisissent un cadeau au hasard dans une boîte à surprise.		X

Car il y a enc les choix PILE et FACE

Car un fois le cadeau choisi, on le garde

Une urne contient 4 billes rouges, 2 billes bleues et une bille verte. On tire successivement et **sans remise** 2 billes de l'urne. Construis l'arbre de probabilités représentant cette expérience aléatoire.

1er tirage	2e tirage	Résultats	Probabilité	
R ($\frac{4}{7}$)	R ($\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$)	(R,R)	$\frac{4}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$	≈ 28,6
	B ($\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$)	(R,B)	$\frac{4}{7}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{21}$	≈ 19,05
	V ($\frac{1}{6}$)	(R,V)	$\frac{4}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{4}{42}=\frac{2}{21}$	≈ 9,5%
B ($\frac{2}{7}$)	R ($\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$)	(B,R)	$\frac{2}{7}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{21}$	≈ 19%
	B ($\frac{1}{6}$)	(B,B)	$\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{42}=\frac{1}{21}$	≈ 4,8%
	V ($\frac{1}{6}$)	(B,V)	$\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{42}=\frac{1}{21}$	≈ 4,8%
V ($\frac{1}{7}$)	R ($\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$)	(V,R)	$\frac{1}{7}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{21}$	≈ 9,5%
	B ($\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$)	(V,B)	$\frac{1}{7}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{21}$	≈ 4,8%

≈ 101%

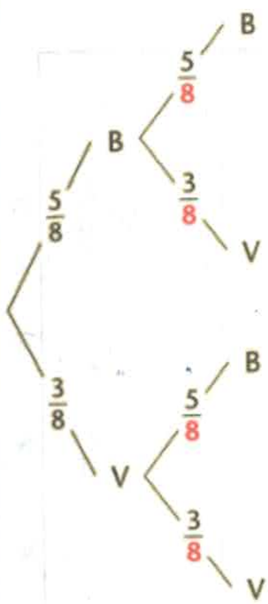
B

Ex. :

1) Expérience aléatoire **avec remise**

On tire une bille d'un sac contenant 5 billes bleues et 3 billes vertes.

On remet cette bille dans le sac, puis on tire de nouveau une bille.



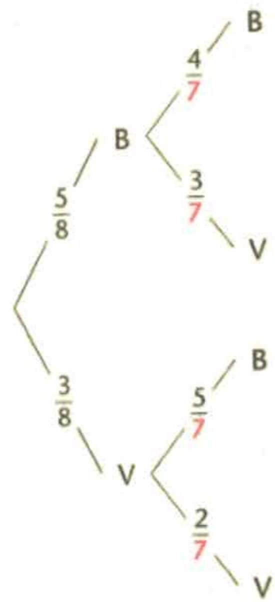
1re bille	2e bille	Résultat	Probabilité
B ($\frac{5}{8}$)	B ($\frac{5}{8}$)	(B, B)	$\frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{25}{64}$
B ($\frac{5}{8}$)	V ($\frac{3}{8}$)	(B, V)	$\frac{5}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{15}{64}$
V ($\frac{3}{8}$)	B ($\frac{5}{8}$)	(V, B)	$\frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{64}$
V ($\frac{3}{8}$)	V ($\frac{3}{8}$)	(V, V)	$\frac{3}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$

Le dénominateur est 8, car on a remis dans le sac la 1re bille tirée.

2) Expérience aléatoire **sans remise**

On tire une bille d'un sac contenant 5 billes bleues et 3 billes vertes.

On ne remet pas cette bille dans le sac, puis on tire de nouveau une bille.



1re bille	2e bille	Résultat	Probabilité
B ($\frac{5}{8}$)	B ($\frac{4}{7}$)	(B, B)	$\frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$
B ($\frac{5}{8}$)	V ($\frac{3}{7}$)	(B, V)	$\frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$
V ($\frac{3}{8}$)	B ($\frac{5}{7}$)	(V, B)	$\frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$
V ($\frac{3}{8}$)	V ($\frac{2}{7}$)	(V, V)	$\frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$

Le dénominateur est 7, car on n'a pas remis dans le sac la 1re bille tirée.

SANS REMISE car
Par politesse, on ne Remet PAS un sandwich dans le Buffet apres l'avoir p[...]

J'ai préparé des sandwichs: 10 au poulet, 12 au jambon et 6 aux œufs. Comme tu aimes les trois sortes, tu décides de piger aléatoirement les sandwichs que tu mangeras. $= 10 + 12 + 6 = 28$ sandwi[...]

a) Quelle est la probabilité de piger au hasard un sandwich au jambon suivi d'un sandwich au jambon?

$P(J, J) = P(J) \times P(J)$ sans remise

$= \frac{12}{28} \times \frac{11}{27}$

$= \frac{132}{756}$

P(Jambon, Jambon) = $\frac{11}{63} \approx 17,5\%$

b) Que vaut P (œuf, poulet)?

$P(O, P) = P(O) \times P(P)$ sans remise

$= \frac{6}{28} \times \frac{10}{27}$

$= \frac{60}{756}$

P(œuf, poulet) = $\frac{5}{63} \approx 7,9\%$

La probabilité fréquentielle

La probabilité fréquentielle d'un événement est la probabilité obtenue à la suite d'une expérience

Probabilité fréquentielle = $\frac{\text{nb de fois que le résultat attendu s'est réalisé}}{\text{nb de foi que l'expérience a été répétée}}$

Expérimentation

À tour de rôle, nous allons lancer une pièce de 0,25$.

Quelle est la probabilité fréquentielle d'obtenir pile? $\frac{1}{2}$ ou 50%

Remarque : Plus le nombre de répétitions est grand, plus la probabilité fréquentielle tend à s'approcher de la probabilité théorique.

Effectif: Nb de personne ayant répondu cette réponse
Fréquence: % des personnes ayant répondu cette réponse

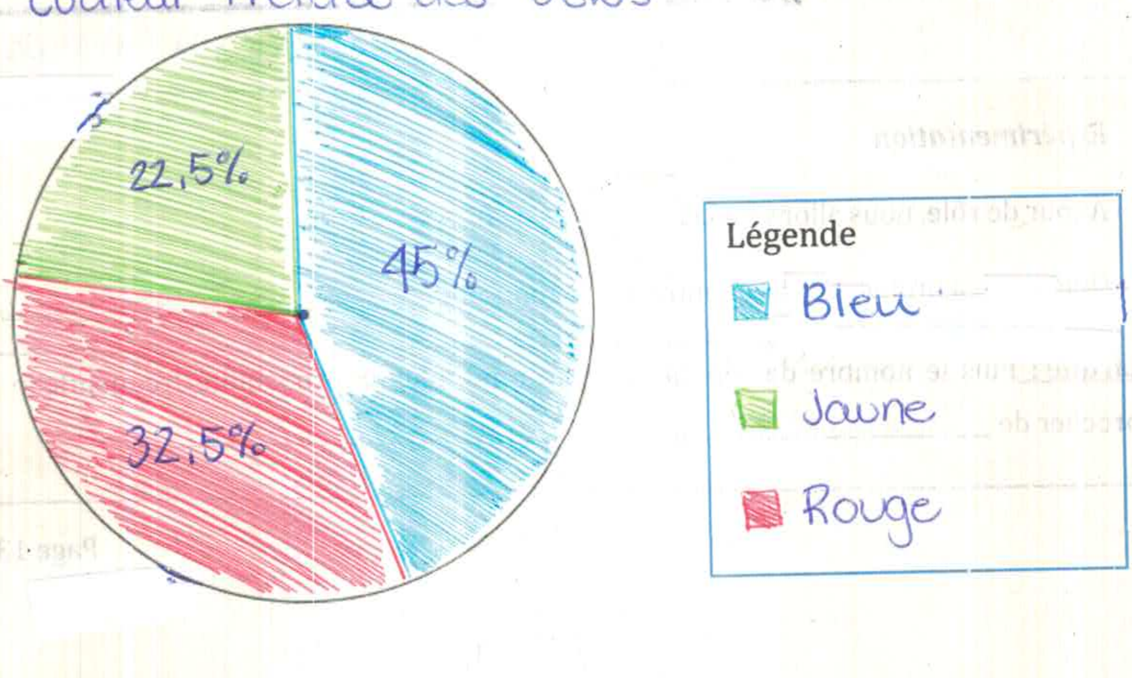
Le diagramme circulaire

1) À partir d'un tableau dénombrant les effectifs ou les fréquences de la distribution, on déterminer la mesure de **l'angle au centre** correspondant à chacune des modalités. **Le calcul est une proportion.**
2) Tracer les angles avec un rapporteur d'angle.
3) Ne pas oublier de mettre **un titre.**
4) On écrit la fréquence pour une meilleure lecture

Complète les tableaux de distribution et construis les diagrammes circulaires associés aux tableaux suivants.

Couleur préférée			
Couleur	**Effectif**	**Fréquence (%)**	**Mesure de l'angle au centre**
Bleu	18	45	162
Jaune	9	22,5	81
Rouge	13	32,5	117
Total	**40**	100	360

Couleur Préférée des Gens



Feuille de Calculs des proportions

Fréquence (%)

- Bleu

$\frac{18}{40} = \frac{x}{100}$ $\quad x = \frac{18 \cdot 100}{40} = 45\%$

- Jaune

$45\% \div 2 = 22{,}5\%$

car $\frac{9}{40}$ est la ½ de $\frac{18}{40}$

- Rouge

$\frac{13}{40} = \frac{x}{100}$ $\quad x = \frac{1300}{40} = 32{,}5\%$

Angle au centre (°)

- ~~B~~Bleu

45% de $360 = \frac{45 \times 360}{100} = 162°$

- Jaune $162° \div 2 = 81°$

- Rouge

$\frac{13}{40} = \frac{x}{360}$ $\quad x = \frac{13 \times 360}{40} = 117°$